

“老师，这样近似可靠吗？”

——一道天体运动题的严格证明

饶华东¹，肖巧玲²

(1.漳州第一中学，福建漳州 363000；2.漳州市第二中学，福建漳州 363000)

摘要：本文用两种方法证明了卫星在椭圆轨道上运行时远地点与近地点的速度之比，方法一利用开普勒第二定律（面积定律）近似证明，方法二利用椭圆知识及天体运动相关知识进行严格证明，发现两种方法所得结果一致，打消了学生对方法一的疑虑。

关键词：天体运动；椭圆轨道；近地点；远地点；速度比

一、问题提出

教学过程中，一道天体运动的题目涉及求解卫星在椭圆轨道上运行时远地点与近地点的速度之比，笔者在课堂上利用开普勒第二定律（面积定律）给出了解答，由于解答过程进行了近似处理，课后几位学生心存疑虑，向笔者抛出“老师，这样近似可靠吗？”的疑问，并希望笔者给出严格证明。笔者经多方查找资料并请教数学老师，最终给出了严格证明，打消了学生的疑虑。

题目：卫星从发射到进入预定轨道往往需要进行多次轨道调整，如图1所示，某次发射任务中先将卫星送至近地轨道，然后再控制卫星进入椭圆轨道，图中O点为地心，地球半径为R，A点是近地轨道和椭圆轨道的交点，远地点B离地面高度为6R，设卫星在近地轨道运动的周期为T，下列对卫星在椭圆轨道上运动的分析，其中正确的是（ ）。

A. 控制卫星从图中低轨道进入椭圆轨道需要使卫星减速；

B. 在椭圆轨道上运行时，卫星通过A点时的速度是通过B点时速度的7倍；

C. 卫星通过A点时的加速度是通过B点时加速度的6倍；

D. 卫星从A点经4T的时间刚好能到达B点。

本题正确答案为BD，问题出现在对B选项的解

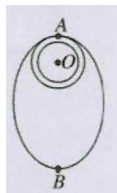


图1

析上。

二、利用开普勒第二定律解析B选项

如图2所示，设卫星从A运动到C及从B运动到D的时间均为 Δt （ Δt 为一极短时间），由开普勒第二定律可知，图中两阴影部分面积相等。在很短的时间内，卫星近似做匀速运动，两阴影部分面积可用 ΔAOC 和 ΔBOD 的面积近似替代，又因为时间极短， $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 很小，所以

$$S_{\Delta AOC} \approx \frac{1}{2} v_A \Delta t \overline{AO},$$

$$S_{\Delta BOD} \approx \frac{1}{2} v_B \Delta t \overline{BO},$$

由题意可知 $\overline{AO} = R$ ， $\overline{BO} = 7R$ ，又根据开普勒第二定律 $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta BOD}$ ，解得 $v_A = 7v_B$ 。

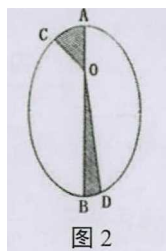


图2

三、对选项B进行严格证明

建立如图3所示的直角坐标系，x轴过椭圆的短轴，y轴过椭圆的长轴，O'为坐标原点，O为地球球心，也是椭圆的一个焦点，以a、b、c分别表示椭圆的长半轴、短半轴、半焦距，由题意及几何关系可知 $a = 4R$ ， $b = \sqrt{7}R$ ， $c = 3R$ 。设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (1)$$

(1)式变形得

基金项目：福建省中青年骨干教师教育科研项目，项目编号：JZ170412（福建教育学院资助），课题名称：提高高中生应用数学知识解决物理问题能力的研究。

作者简介：饶华东（1983—），男，福建省漳州市第一中学一级教师，主要从事物理教学研究；

肖巧玲（1985—），女，福建省漳州市第二中学一级教师，主要从事数学教学研究。

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2, \quad (2)$$

(2) 式对 x 求导得

$$2a^2x + 2b^2yy' = 0, \quad (3)$$

即
$$y' = -\frac{a^2x}{b^2y}, \quad (4)$$

(3) 式对 x 继续求导得

$$2a^2 + 2b^2(y'y'' + yy''') = 0, \quad (5)$$

联立 (4)、(5) 可得

$$y'' = -\frac{a^2b^2y^2 + a^4x^2}{b^4y^3}, \quad (6)$$

曲率半径公式为

$$r = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \quad (7)$$

联立 (4)、(6) (7), 把 A 点坐标 $(0, a)$, B 点坐标 $(0, -a)$ 代入可得 A 、 B 两点曲率半径均为

$$r = \frac{a}{b^2}, \quad (8)$$

设地球质量为 M , 卫星质量为 m , 卫星运行至 A 、 B 位置时, 由牛顿第二定律, 得

$$\frac{GMm}{(a-c)^2} = m \frac{v_A^2}{r}, \quad (9)$$

$$\frac{GMm}{(a+c)^2} = m \frac{v_B^2}{r}, \quad (10)$$

把 (8) 式分别代入 (9)、(10) 得

$$v_A = \frac{b}{a-c} \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad (11)$$

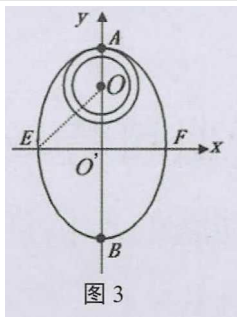


图 3

$$v_B = \frac{b}{a+c} \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad (12)$$

又因为 $a = 4R, b = \sqrt{7}R, c = 3R$, 代入 (11)、(12),

得
$$v_A = \sqrt{\frac{7GM}{4R}}, \quad v_B = \sqrt{\frac{GM}{28R}},$$

即 $v_A = 7v_B$, 证毕。

两种解法答案一致, 说明方法一的近似是合理的。

进一步联立 (11)、(12) 两式可得

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{a+c}{a-c},$$

式中 a 为半长轴, c 为半焦距。此结论具有一般性, 即天体在椭圆轨道上运行时, 近地点与远地点的速度大小之比等于长半轴与半焦距之和比长半轴与半焦距之差。

四、结语

教学过程中, 对于学生的疑问, 教师不应该回避, 而应重视它, 把它当作生成性资源, 在解决这些疑问的过程中, 既达到了打消学生疑虑的效果, 同时也可以提高教师本身的教学能力, 正所谓教学相长, 这样一举两得的事, 何乐而不为呢?

参考文献:

[1] 付尊来, 李兴. 例谈物理问题中的“椭圆”[J]. 中学物理(物理与教学), 2013, (12): 37-38.

(下转第 90 页)

第一步, 当二者挤压最紧时可得到

$$mv = (m + 2m)v_{共},$$

可得到

$$v_{共} = \frac{1}{3}v,$$

根据对称性可求知, 弹性碰撞后对 A 有

$$v - v_{共} = v_{共} - v_A,$$

弹性碰撞后对 B 有

$$v_B - v_{共} = v_{共} - 0,$$

所以

$$v_A = -\frac{1}{3}v, \quad v_B = \frac{2}{3}v.$$

其它实例大家可以自己去尝试分析, 不在此赘述。

靠纯粹的死记硬背方式是不能学好物理的, 物理的魅力在于灵活的应用物理思想和物理方法解决问题。在中学物理教学过程中作为老师而言, 我们既要有自己的物理思想和方法, 又要尽可能把物理思想方法和物理过程用简单的模型和简明的方式呈现给学生。神奇而又巧妙的物理才是最吸引学生的!

参考文献:

[1] 张婷玉, 胡杨洋. 质心参考系下弹性碰撞规律的形式与方法[J]. 首都师范大学学报, 2016, 37(4):41~45.

[2] 沈向安. 对一维弹性碰撞问题的巧妙解答[J]. 物理通报, 2014, (5):68~70.